GOBIERNO DEL ESTADO DE
BAJA CALIFORNIA SUR

IEEA
BAJA CALIFORNIA SUR
INSTITUTO ESTATAL DE EDUCACIÓN PARA ADULTOS

PENSAMIENTO MATEMÁTICO 4

Modelo de Educación para la Vida, AprendeINEA

GUÍA DE APRENDIZAJE

DIRECCIÓN DE SERVICIOS EDUCATIVOS
IEEA. BCS
ELABORÓ: DANIEL EDUARDO CATAÑO ROMERO

Junio 2025

Propósito:

En este módulo te introducirás en el conocimiento del lenguaje algebraico al trabajar con monomios y polinomios; aplicarás las leyes de los signos para las operaciones de suma y resta, multiplicación y división algebraicas. Estos conocimientos te serán de utilidad para plantear funciones entre variables dependientes e independientes sobre situaciones de la vida cotidiana, que aprenderás a tabular y a plasmar gráficamente en el plano.

Esta guía se elaboró en el área de formación de la Dirección General de IEEA Baja California Sur.

SECUNDARIA

Pensamiento matemático

4

Modelo de Educación para la Vida, AprendeINEA

UNIDAD 1 Definición y operaciones con monomios y polinomios

Secuencia 1. Sumas y restas de monomios

Tema 1. Lenguaje algebraico

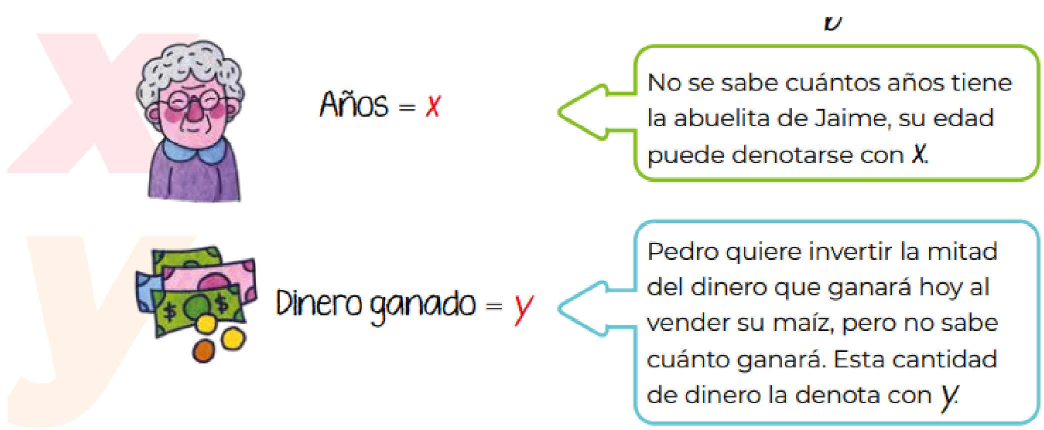
El lenguaje algebraico es una forma de escribir operaciones numéricas aunque no se conozcan todos los números que participan en ellas. Por ejemplo, en la suma x + 12 = 23, la letra x significa un número desconocido que al sumarse con 12 da como resultado 23.

Esta forma de escribir representa las operaciones de forma general y estructurada, para lo cual se utilizan letras, las cuales reciben el nombre de variables y sirven para reemplazar los valores que no se tienen. Como en el ejemplo anterior, representa cualquier suma de dos números y cada letra a una variable numérica.

Las variables numéricas se utilizan para describir con números situaciones de las cuales no se conoce toda la información sino solo una parte, no se tiene certeza de lo que ocurrirá o se buscan ciertos valores.

En matemáticas, los objetos como símbolos, operaciones o variables, tienen una manera de escribirse. El modo en que se escriben los objetos matemáticos se llama notación, y el verbo que se usa para una notación es denotar.

Puesto que las variables tienen valores desconocidos se denotan con letras, llamadas literales, por ejemplo:



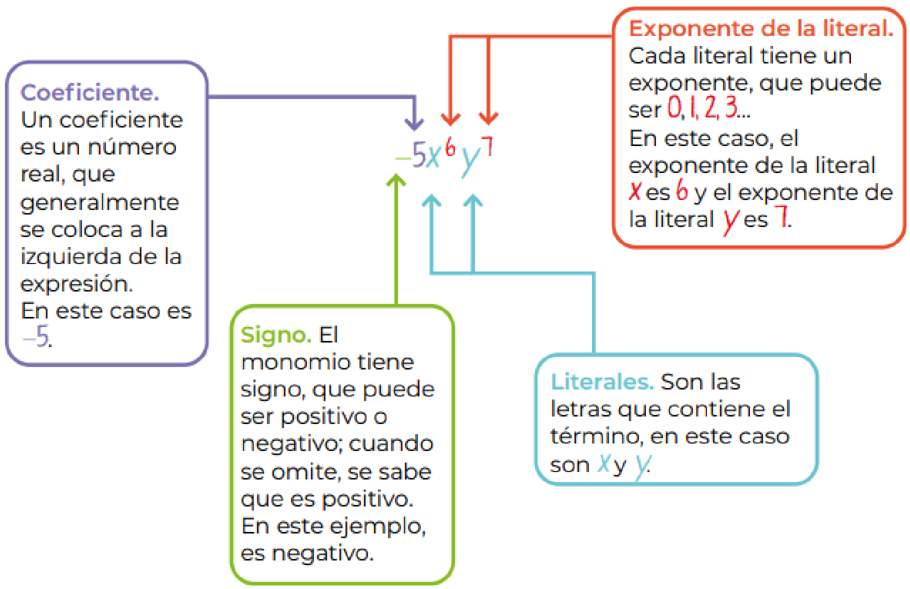
Tema 2. Los monomios

Ya sabes que las expresiones algebraicas son aquellas que combinan literales, números y operaciones.

Las expresiones algebraicas se agrupan en términos por medio de signos de más (+) y de menos (-). Por ejemplo, la siguiente expresión algebraica tiene tres términos, pues hay dos signos "+", separando la expresión en tres partes:

$$\underbrace{x^3}_{\text{Término 1}} + \underbrace{3x^2 y^7}_{\text{Término 2}} + \underbrace{y^2}_{\text{Término 3}}$$

Un monomio es una expresión algebraica que tiene un solo término. El término se forma con literales, que a su vez tienen exponentes y grado. Este último es el valor del exponente al cual se eleva la literal. Observa el esquema.



Grado del monomio: Todo monomio tiene un grado, que corresponde al exponente de la literal o a la suma de los exponentes de las literales que se están multiplicando.

x

Este monomio es de **primer grado o de grado 1**, porque solo hay **una literal** y está elevada a la **potencia 1**.

$x^2 = x \cdot x$

Este monomio es de **segundo grado o grado 2**, porque su **exponente es 2**.

Tema 3. Suma y Resta de Monomios

En un monomio, las variables o literales representan números cuyo valor se desconoce en cierto momento, como viste en los ejemplos pasados.

Es posible hacer operaciones con ellas, el resultado contiene tanto números o valores conocidos (coeficiente), como los valores que se desconocen (variables o literales).

En estas operaciones no se busca conocer el valor numérico de las variables, sino simplificar la expresión algebraica, para ello se tiene que cumplir algunas condiciones.

1. Que las expresiones sean términos semejantes, es decir, que tengan las mismas literales y que cada literal esté elevada a la misma potencia. Las expresiones que cumplen con estos requisitos son términos semejantes.

2. Si no se cumplen estas dos condiciones, la expresión no se puede simplificar.

Ejemplo: $3\mathrm{xyz} + 5\mathrm{xy} = 8\mathrm{xyz}$

Los valores que podemos sumar (x, y) ya que se encuentran en los monomios se pueden sumar

Ejemplo: $3\mathrm{x} - 9\mathrm{x} = -6\mathrm{x}$

Los valores son (x) ya que se encuentran en los 2 se pueden restar y se pone el signo cuyo valor sea mayor

Ejemplo: $3\mathrm{x} + 5\mathrm{y} = 3\mathrm{x} + 5\mathrm{y}$

Esta operación no se puede realizar ya que las variables no coinciden.

Secuencia 2: Multiplicación y división de monomios

Tema 1. Multiplicaciones y divisiones algebraicas

En álgebra no se utiliza el signo para multiplicar (x) porque se confunde con una letra equis (X). Para indicar que varias literales y números se están multiplicando, es suficiente escribirlos juntos.

Otra forma de representar la multiplicación algebraica es colocar los elementos dentro de paréntesis. Así, la expresión: 4(8x) significa que el 4 está multiplicando al monomio 8x.

En el caso de la división, en álgebra hay tres formas comunes para denotarla.

1. Como un número racional.

$$\frac{-10x}{5x}$$

2. Con un exponente negativo.

$$-4a^5 = \frac{1}{4a^5}$$

3. Con la casita de la división.

$$ab\,\overline{)\,4ab^2}$$

Tema 2. La multiplicación de monomio.

A diferencia de la suma y la resta de monomios, en las que los monomios deben ser términos semejantes (con literales y exponentes iguales), para multiplicar dos monomios no importa si no tienen la misma parte literal, primero se multiplican los signos, después los coeficientes y al final las literales.

Por ejemplo, si se tiene:

$$(-4x^2y)(6x^3) = -24$$

1. Primero se multiplican los signos. Aquí es muy importante que recuerdes la ley de los signos para la multiplicación.

Siguiendo esta ley tenemos que el signo negativo del primer monomio por el signo positivo del segundo monomio es igual al signo negativo:

2. Después se multiplican los coeficientes. En nuestro ejemplo, 4 por 6: 4 X 6 = 24.

3. Y al final se multiplican las literales. Cuando se multiplican dos literales que son iguales, se suman sus exponentes. Las literales que no tienen otra idéntica con la cual multiplicarse pasan con el mismo exponente al resultado.

   En el ejemplo, se tiene x^2 en el primer monomio y x^3 en el segundo, por lo que se suman sus exponentes, ya que ambas literales son la letra x. Además, como y solo aparece en el primer monomio, pasa igual al resultado.

$$(-4x^2y)(6x^3) = -24x^{2+3}y = -24x^5y$$

$$(-4x^2y)(6x^3) = -24x^5y$$

Actividad. Resuelve las siguientes multiplicaciones.

a) $(6a)(-5a) =$

b) $(-y)(-5xy) =$

c) $4ab(-4ab^2) =$

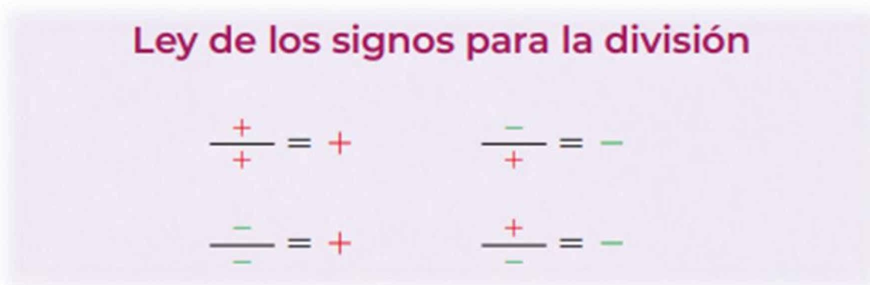
d) $(12xyz)(2xz) =$

Tema 3. La división de monomios

Para dividir dos monomios, primero se dividen los signos, después los coeficientes y al final las literales. Por ejemplo, para dividir:

$$\frac{45x^2}{-9x}$$

1. Primero se dividen los signos. La ley de los signos de la multiplicación aplica también a la división: signos iguales, ya sea positivos o negativos, quedan positivos, y signos distintos dan un resultado negativo.



De esta forma, el signo positivo (+) del numerador entre el signo negativo (-) del denominador dan como resultado el signo negativo (-):

$$\frac{45x^2}{-9x} = -$$

2. Después se dividen los coeficientes. En nuestro ejemplo, 45/9=5

$$\frac{45x^2}{-9x} = -5$$

3. Y al final se dividen las literales. Cuando se dividen dos literales que son la misma letra, sus exponentes se restan. Las literales que no tienen otra idéntica con la cual dividirse pasan con el mismo exponente al resultado.
En el ejemplo, se tiene x^2 en el numerador y x en el denominador, por lo que se restan sus exponentes, ya que ambas literales son la letra equis (x).

$$\frac{45x^2}{-9x} = -5x^{2-1} = -5x^1 = -5x$$

El exponente de la x es igual a 1, por lo tanto, no se escribe.

Actividad. Resuelve las siguientes divisiones de monomios.

1. $\dfrac{-20mn^6}{10mn^5} =$

2. $\dfrac{-8x^3y^2}{2x^2y^2} =$

3. $\dfrac{63b^5}{9b^2} =$

4. $\dfrac{49c^8d^9}{7c^3d^5} =$

Secuencia 1. Sumas y restas de polinomios

Tema 1. Los polinomios y su clasificación

Recuerda que una expresión algebraica es aquella que combina letras (literales, variables o incógnitas) con números y operaciones matemáticas. Cada expresión algebraica se llama monomio o término. Uno o más monomios o términos pueden unirse con un signo de suma (+) o de resta (-).

Las expresiones algebraicas adquieren su nombre de acuerdo con el número de términos que tienen. Así, un monomio está formado por un solo término o expresión algebraica, mientras que un polinomio está formado por un conjunto de dos o más monomios.

Cuando el polinomio tiene dos términos recibe el nombre de binomio, cuando tiene tres, trinomio y, a partir de cuatro o más términos, se llama solamente polinomio. Mira el siguiente cuadro.

Número de términos	Nombre	Ejemplo
1 término	Monomio	$3x^5y$
2 téminos	Binomio	$3ab + a$
3 términos	Trinomio	$3d + 6e - 5$
4 o más términos	Polinomio	$3m^5 - 6mn + 3n + 6$

Características de un polinomio

- ✓ Como el polinomio se integra por monomios, comparte sus características. Por lo tanto, contiene:
- ✓ Literales, y cada literal está elevada a un exponente.
- ✓ Coeficientes, que son los números que acompañan a las letras.
- ✓ Signos de operaciones más (+) o menos (-), que enlazan los monomios o términos que los conforman.
- ✓ Término independiente, es el número que no se acompaña de alguna literal.
- ✓ Grado del polinomio, es igual al exponente más grande que tenga cualquiera de las literales.
- ✓ Está formado por 5 términos: 4 expresiones algebraicas y 1 término independiente.
- ✓ El grado del polinomio es 5.
- ✓ Porque su exponente más grande es el número 5.

Actividad. Subraya el nombre que le corresponde a cada expresión algebraica.

- $x^2 + 2x + 2$

  Binomio Trinomio

- $ab + 1$

  Binomio Trinomio

- $xy^2z + 20xy^4z + 9xy^2z + 2xz + 30$

  Binomio Polinomio

- $x^5yzw^2 + xy^4 + 2w$

  Binomio Trinomio

- $-10x^5yz^2$

  Monomio Trinomio

Escribe el grado de los siguientes polinomios

1. $4x^2 + 3x^2 - 5x^2$ Grado: ______________
2. $3x^2 + 12$ Grado: ______________
3. $x^2y^3z^5 + 12z$ Grado: ______________
4. $a + b$ Grado: ______________
5. $\frac{m^3}{m} + \frac{2m^3}{m}$ Grado: ______________

Tema 2. La suma y la resta de polinomios.

Al igual que con los monomios, en un polinomio solo pueden sumarse o restarse los términos semejantes. Recuerda que los términos semejantes son aquellos que tienen las mismas literales elevadas a los mismos exponentes.

Así, $x^2y + 6x^2y$ y es una suma de términos semejantes porque ambos tienen una x^2 y una y.

Cabe señalar que, al sumar o restar dos polinomios, ayuda mucho que sus términos estén ordenados.

Los términos de un polinomio están ordenados cuando están escritos con sus letras colocadas en orden alfabético y con sus exponentes de mayor a menor, por ejemplo, el polinomio:

$$-5xy^2 + xy + 12x^3y + y^3 + 6x^2y$$

Está desordenado con respecto a la X y a la Y. Si lo ordenamos poniendo primero las X, con sus exponentes de mayor a menor, nos queda de la siguiente forma:

$$12x^3y+6x^2y - xy - 5xy^2 - y^3$$

Para sumar o restar dos polinomios, primero se quitan los paréntesis, cuando los haya, y se identifican sus términos semejantes.

$$(2a^2 + 7ab - b^2) + (10a^2 - ab - 9b^2)$$

Primero se quita el paréntesis. Por tratarse de una suma, cada término del primer y segundo polinomio conservan sus signos originales. (si la operación es una resta los términos del segundo polinomio se invierten)

$$2a^2 + 7ab - b^2 + 10a^2 - ab - 9b^2$$

A continuación, se identifican los términos semejantes:

$$2a^2 + 7ab - b^2 + 10a^2 - ab - 9b^2$$

Y se suman o restan algebraicamente:

$$12a^2 - 6ab - 10b^2$$

Actividad. Resuelve las operaciones siguientes.

a) $(2x + 2yz) + (3x - yz) =$

b) $(2x^2yz - 10y) + (8x^2yz - 9y)$=

c) $(5xy + 12x) - (3xy + 2x)$=

d) $(3y + 2z) - (4y - 3z)$=

Secuencia 4. Multiplicación y división de polinomios

Tema 1. La multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se aplica la propiedad distributiva, la cual establece que la multiplicación de un número por una suma da el mismo resultado que la suma de cada sumando multiplicado por dicho número.

Expresado con números:

2(3 + 4) = 2(7) = 14

2(3 + 4) = (2 x 3) + (2 + 4) = (6) + (8) = 14

En álgebra, primero se multiplican los signos, después los coeficientes y al final las literales.

Por ejemplo, en la multiplicación de los monomios $(x - 6y)$ y $(-4x^2 + 2xy + y)$ se hace lo siguiente:

Se acomodan en forma de multiplicación. Recuerda que los paréntesis indican multiplicación cuando no hay un signo entre ellos: $(x - 6y)$ y $(-4x^2 + 2xy + y)$

Se multiplica el primer término del polinomio más corto, que en este ejemplo es x, por todos los términos del segundo polinomio: $4x^2 + 2xy + y$, para después multiplicar el segundo término del primer polinomio, que en este caso es -6y, por todos los términos del polinomio $4x^2 + 2xy + y$.

Por lo cual tenemos que tener en cuenta que:

a) La propiedad distributiva nos permite multiplicar las operaciones en parciales.
b) Al finalizar se juntan las multiplicaciones parciales para obtener el resultado final.
c) Aplicamos ley de los signos en cada multiplicación:
d) En la multiplicación y División de polinomios las potencias se suman o resta dependiendo de su signo

Ejemplo:

1. $(x)\ (-4x^2 + 2xy + y)$

$$-4x^3 + 2x^2y + xy$$

2. $(-6y)\ (-4x^2 + 2xy + y)$

$$+24x^2y - 12xy^2 - 6y^2$$

A continuación, se simplifica el polinomio sumando entre sí los términos semejantes que se tengan. En este polinomio se tienen los siguientes términos semejantes: Recuerda que dos o más términos son semejantes cuando tienen las mismas letras elevadas a los mismos exponentes.

$$-4x^3 + 2x^2y + xy + 24x^2y - 12xy^2 - 6y^2$$

$$-4x^3 + 26x^2y + xy - 12xy^2 - 6y^2$$

Actividad. Repasa el tema y resuelve las multiplicaciones siguientes.

a) $(x + y)(x^2 + xy)$

b) $(a^2 - b)(a^2 + a - 2b)$

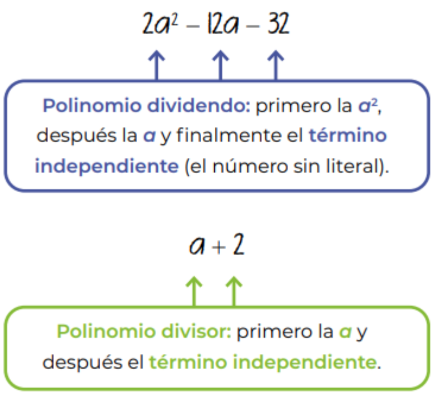
c) $(m - n)(m^3 + n^3)$

d) $(m^3 - m + n)(m^3 + 3n)$

Tema 2. La división de polinomios

Para dividir entre sí dos polinomios, se divide cada término del polinomio dividendo entre cada término del polinomio divisor.

Por ejemplo, si se desea dividir $(2a^2 - 12a - 32)$ entre (a + 2), primero se verifica que ambos polinomios estén ordenados de mayor a menor con respecto a los exponentes de sus literales.

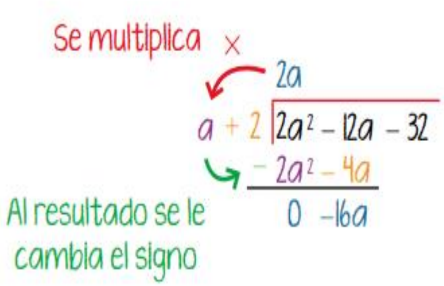


En este caso, se puede ver que ambos polinomios ya están ordenados, así que se acomodan en el formato de la división con casita.

$$a+2 \,\overline{\big)\, 2a^2 - 12a - 32}$$

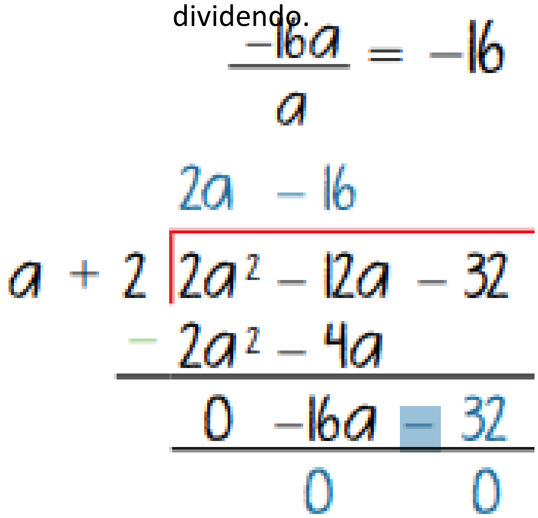
Ahora se divide el primer término del polinomio dividendo entre el primer término del polinomio divisor, recuerda en la división algebraica, los exponentes se restan.

Se escribe el resultado en el cociente de la división de polinomios:



Se multiplica por cada término del polinomio divisor y el resultado se escribe en el residuo con el signo cambiado, escribiendo cada monomio debajo de su respectivo término semejante del polinomio dividendo, para después sumarlo algebraicamente con él.

Se "baja" el siguiente término del polinomio dividendo y se repite el procedimiento anterior hasta terminar todos los polinomios dividendo.



Actividad. Resuelve las siguientes divisiones utilizando la técnica de casita.

a) $\frac{x^2+2x-3}{x+3} =$

b) $\frac{d^3-11d+30}{d-6} =$

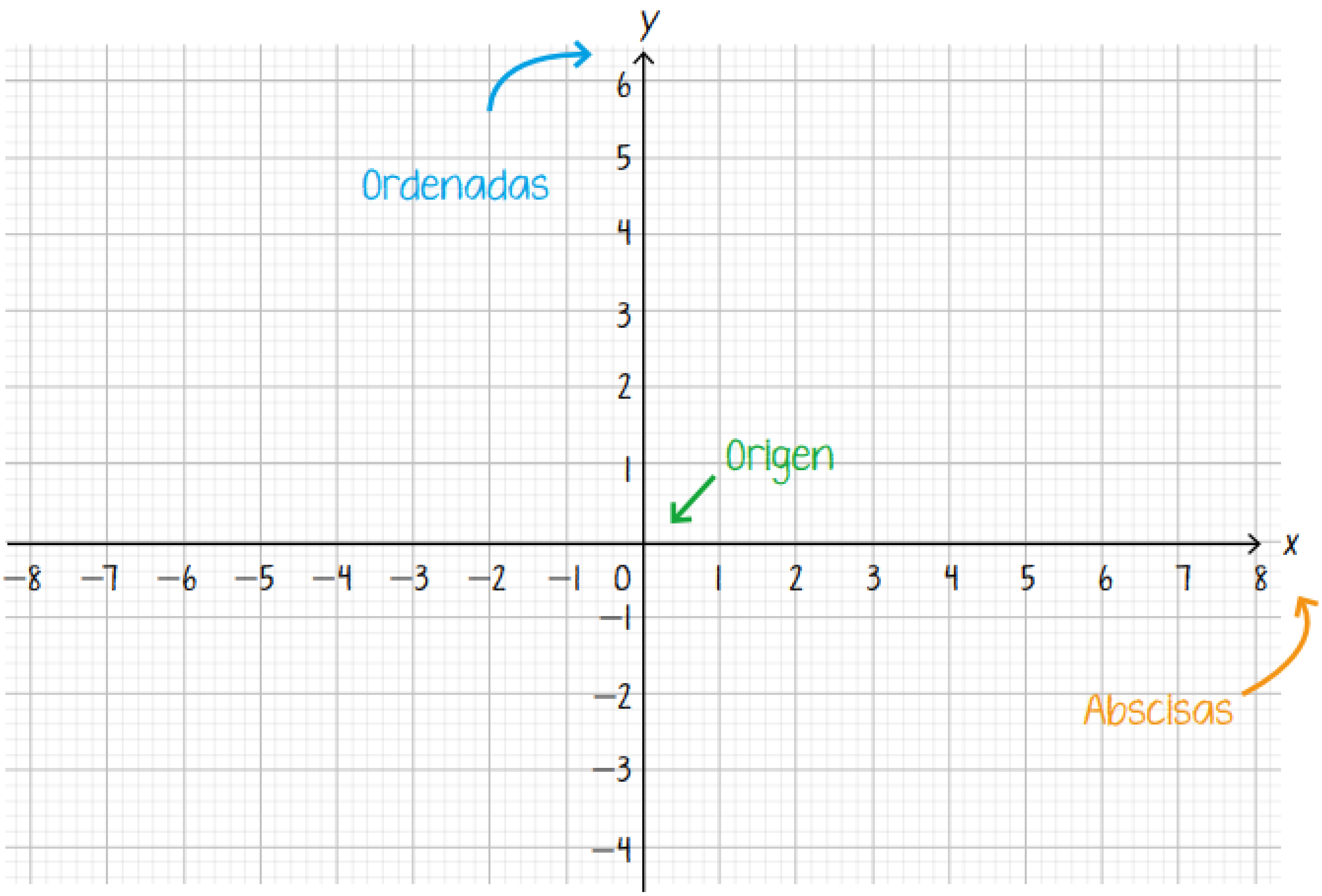
c) $\frac{b^2+15-8b}{d-6} =$

Secuencia 5. El plano cartesiano y las partes que lo componen

Tema 1. El plano cartesiano y sus partes

Estas rectas son también llamadas ejes:

- El eje horizontal es llamado eje de las x o eje de las abscisas.
- El eje vertical es llamado eje de las y o eje de las ordenadas.

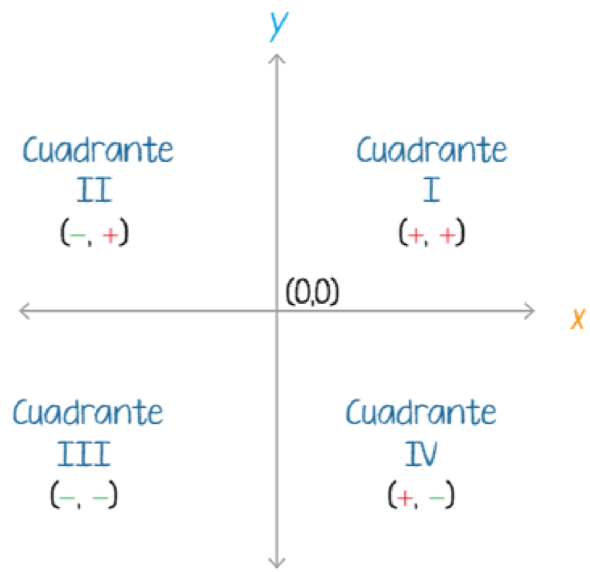


Este tipo de representación se utiliza para ubicar puntos en el espacio, lo que permite hacer cálculos y resolver problemas algebraicos de manera gráfica.

Al igual que en la recta numérica, en el plano cartesiano los números se representan por cortes o líneas equidistantes, es decir, a la misma distancia cada una. Las líneas más gruesas de la cuadrícula corresponden a cada corte y las más pequeñas a fracciones entre un número y otro.

En la recta numérica se ubican las cantidades sobre un solo eje horizontal; en cambio, como en el plano cartesiano son dos rectas, para ubicar un punto se necesitan dos números, uno por cada recta

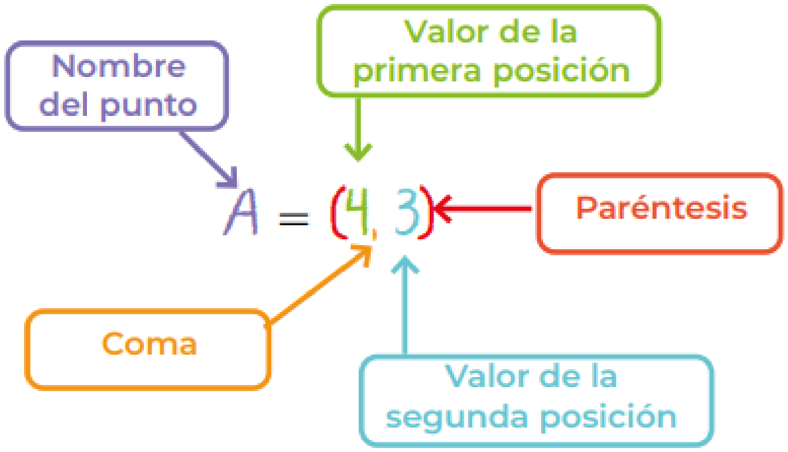
Las intersecciones de los ejes producen cuatro regiones llamadas cuadrantes, que se indican con números romanos.



Actividad. Dibuja un plano cartesiano con todas sus características

Tema 2. Las coordenadas y sus componentes

Para ubicar un punto en el plano cartesiano se requieren dos números, uno por cada recta; estos números son llamados coordenadas y se escriben juntos, entre paréntesis y separados por una coma. Los puntos se suelen nombrar con letras mayúsculas comenzando por la A, como en este ejemplo.



El valor de la primera posición lo da el valor en el eje x, mientras que el valor en la segunda posición lo da el valor en el eje y.

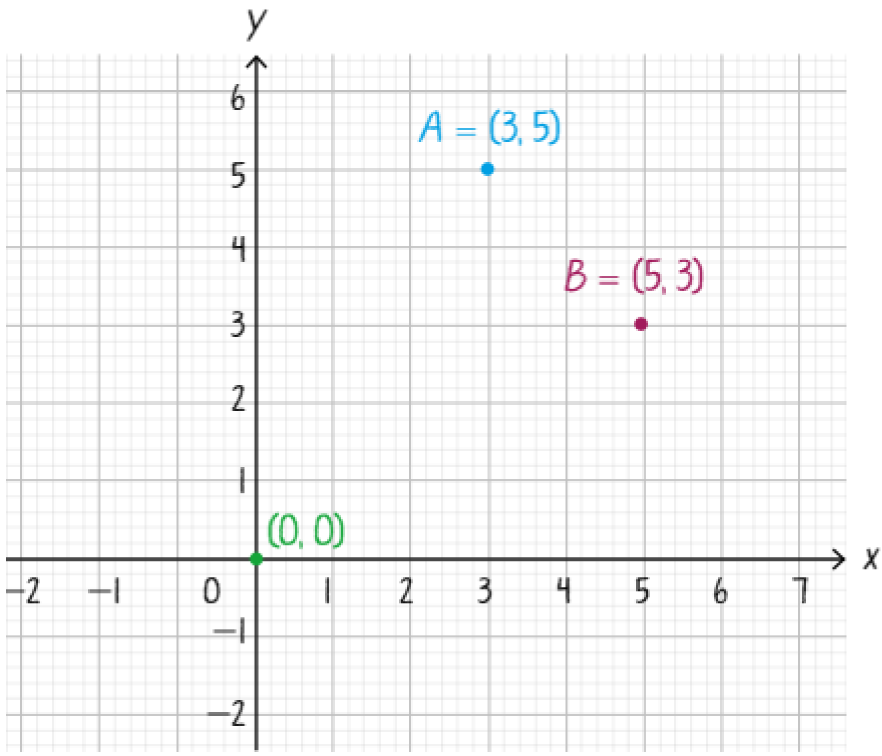
En un mismo plano cartesiano se pueden ubicar varios puntos, mismos que pueden ser positivos o negativos.

Tema 3. Ubicación de puntos en el plano cartesiano

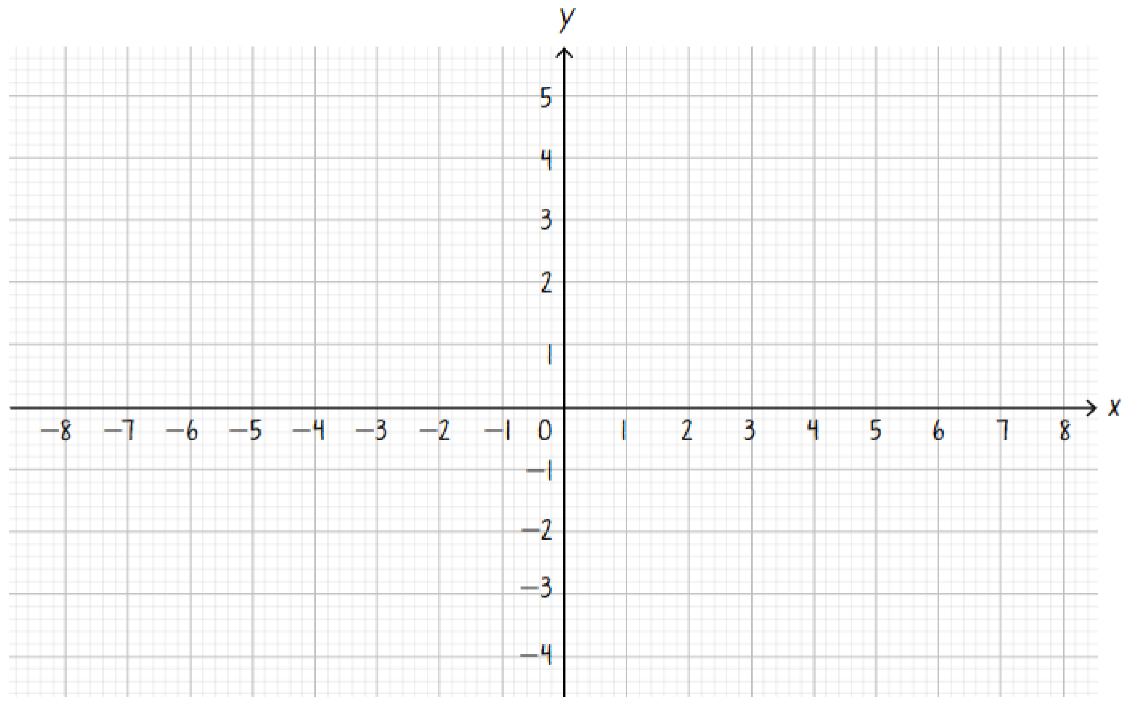
En el plano cartesiano se puede ubicar un punto mediante una coordenada. También es posible hacerlo al revés: si tienes una coordenada, puedes colocar su punto correspondiente en el plano cartesiano.

Para ubicar la coordenada (5, 3), como son dos números positivos, se cuentan 5 unidades hacia la derecha desde el origen (0, 0), luego se cuentan 3 unidades hacia arriba y se marca un punto en el cruce de ambas. Ahí se ubican las coordenadas, así que se señala con un punto visible y se nombra para distinguirlo.

En el lugar de cruce se ubica el punto de las coordenadas. Se nombra el punto.



Actividad. Ubica las coordenadas en la posición correcta del plano cartesiano



a) $(4, 1)$

b) $(4, -1)$

c) $(2, 3)$

d) $(-2, -3)$

e) $(-2, 3)$

f) $(-3, -2)$

g) $(-3, 2)$

h) $(-3, -1)$

i) $(-2, -2)$

Secuencia 6. El trazo de rectas en el plano cartesiano

Tema 1. La función en álgebra

Una cantidad está en función de otra cuando depende de ella.

Cuando la variable y depende de la x, significa que los valores de la y dependen de los valores que se le asignen a la x

En álgebra, lo anterior se escribe como una función

$$y(x) = x$$

Las funciones pueden representarse con ecuaciones o fórmulas.

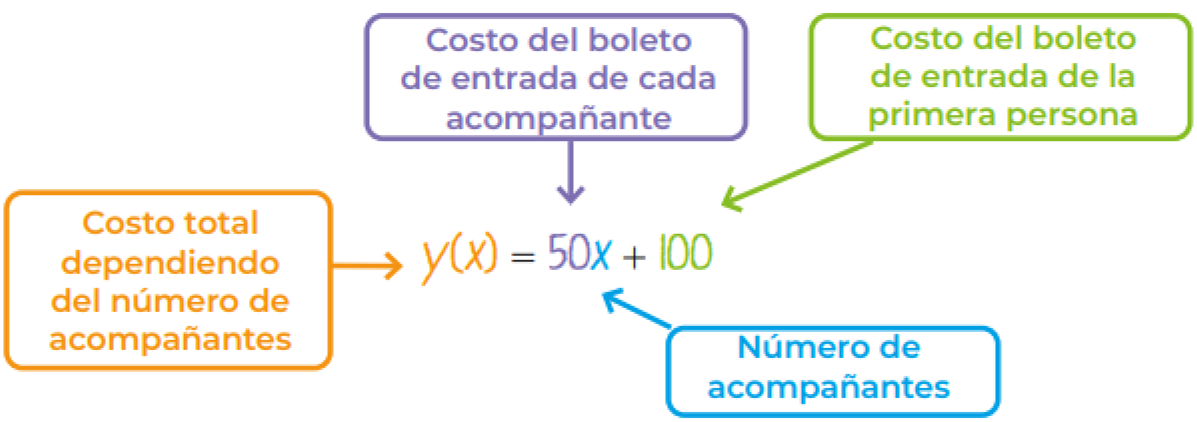
Se lee y está en función de x. También puede escribirse como f(x) 5 x y se lee: “la función de x es igual a x”, donde la función de x es igual a y.

Una igualdad se caracteriza porque tiene un signo igual (5) que indica que lo que está del lado izquierdo es igual a lo que está del lado derecho. Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones matemáticas y se puede utilizar para representar una función. Una función es simplemente una relación entre dos o más valores.

Ejemplo: En un parque de diversiones se cobra a $100 la entrada y tiene un día de promoción durante el cual se pagan $50 por cada boleto de las personas que acompañen a alguien que ya pagó $100 para entrar.

En este caso, el monto a pagar para entrar al parque depende o está en función del costo completo del boleto de una persona y de la cantidad de personas que la acompañan, cada una debe pagar solo $50.

Lo anterior puede escribirse de la siguiente forma y significa:



Tema 2. Cálculo de una función dada

Calcular una función significa encontrar cuánto vale la y o variable dependiente para cada valor de la x o variable independiente.

Ejemplo: En un parque de diversiones se cobra a $100 la entrada y tiene un día de promoción durante el cual se pagan $50 por cada boleto de las personas que acompañen a alguien que ya pagó $100 para entrar.

Para saber el costo total de entrada al parque de diversiones si van 4 acompañantes, se tiene que calcular la función de x = 4

Entonces, se sustituye la x por cada número de acompañantes. Ya solo tienes que hacer las operaciones para encontrar el resultado.

$$y(x) = 50x + 100$$

$$y(4) = 50(4) + 100$$

$$y(4) = 200 + 100$$

$$y(4) = 300$$

En resumen, lo que hiciste fue lo siguiente:

- Sustituir x por 4
- Multiplicar 50 por 4
- Sumar 200 más 100 para obtener el resultado

Así que se tienen que pagar $300 para entrar al parque de diversiones si van 4 acompañantes. Es decir, el valor de y es igual a 300 cuando x toma el valor de 4.

Actividad. Revisa las funciones y calcula los resultados.

En la función y(x) = 3x + 1, ¿cuál es el valor de y cuando x toma el valor de 4?

En la función y(x) = 3x - 3, ¿cuál es el valor de y cuando x toma el valor de 5?

En la función y(x) = 8x, ¿cuál es el valor de y cuando x toma el valor de 2?

Tema 3. Tablas con rangos de valores para una función

Una forma sencilla de ordenar los valores de y que se van a calcular es mediante una tabla de valores como las que ya has hecho para representaciones como gráficas de barras o histogramas.

Para hacer la tabla se comienza por escribir en la misma los títulos de las columnas: “x” y “y”, en el orden que se muestra, y agregar los valores de x que interesan. En el ejemplo del costo de los boletos, desde 0 hasta 4 acompañantes. y(x) = 50x + 100

En resumen, los números de la columna de la izquierda son los valores que toma la x, mientras los de la columna de la derecha son los valores de y, es decir, los resultados que arroja la función para cada uno de esos valores.

x	y(x) = 50x + 100
1	150
2	200
3	250
4	300
5	350

Estos son los cálculos realizados para llenar la tabla, sustituyendo cada valor de x y resolviendo las operaciones.

Tema 4. Gráfica de la tabla de valores de una función

Las funciones y los distintos valores que se obtienen al variar los valores de x y de y pueden graficarse en el plano cartesiano. Para hacer la gráfica, se considera que cada par de valores de x y y corresponda con las coordenadas (x, y) de un punto dentro del plano cartesiano.

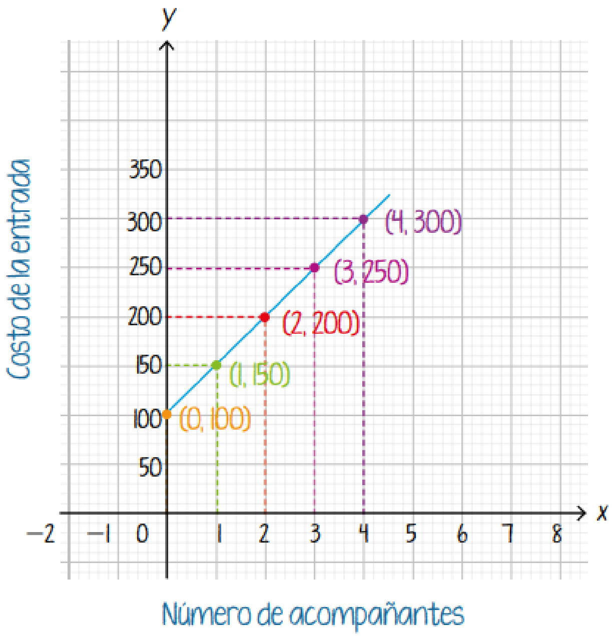
Continuando con el ejemplo del parque, en total se tienen cinco puntos en la tabla, cada uno con sus propias coordenadas (x, y). El primer punto de la gráfica está formado por las coordenadas (0, 100), que corresponden a la persona que entra sola, sin acompañante.

x	y
0	100
1	150
2	200
3	250
4	300

Puntos asociados

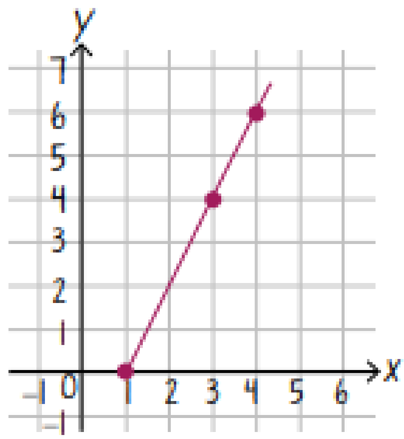
(0, 100)
(1, 150)
(2, 200)
(3, 250)
(4, 300)

Se localizan los puntos en el plano cartesiano y se unen para crear la gráfica de la función que, como puede verse, es una línea recta.


y
x
Costo de la entrada
Número de acompañantes
350
300
250
200
150
100
50
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
(0, 100)
(1, 150)
(2, 200)
(3, 250)
(4, 300)

Actividad. Une cada grafica con la tabla que le corresponde.

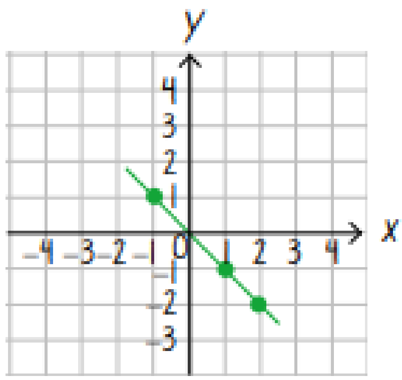
1.



x	y
−4	5
−3	4
−1	2

( )

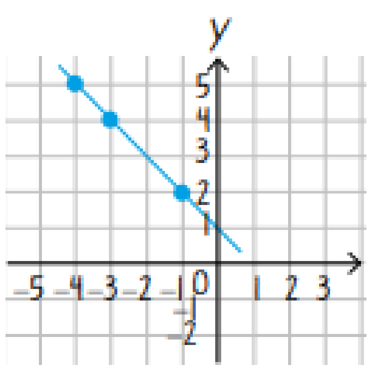
2.



x	y
1	0
3	4
4	6

( )

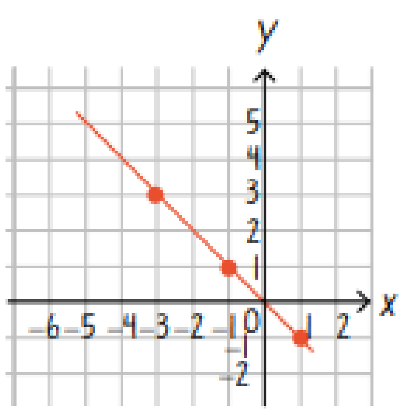
3.



x	y
−3	3
−1	1
1	−1

( )

4.



x	y
−1	1
1	−1
2	−2

( )

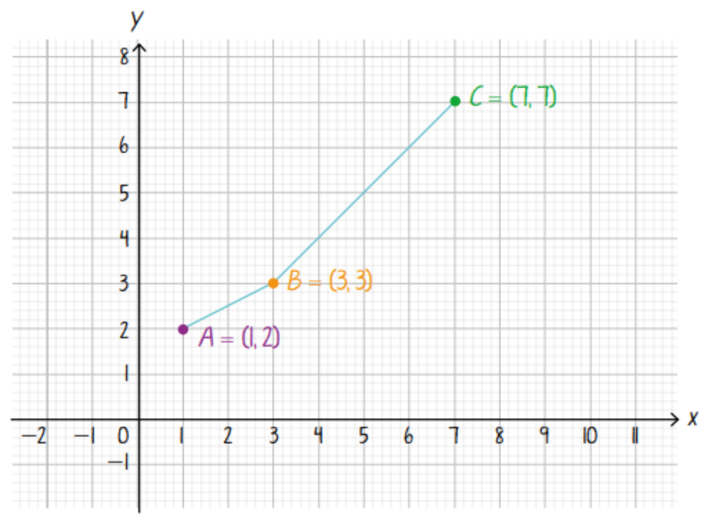
Secuencia 7. La interpolación y su procedimiento

Tema 1. Qué es una interpolación y cómo se realiza

La interpolación es un método a través del cual se encuentran puntos en una tabla o gráfica a partir de un conjunto de datos que esta misma contiene.

Para hacerla, primero se debe ubicar el valor que se quiere conocer en la tabla. Asegúrate de que los datos de la tabla estén ordenados de acuerdo con el valor de x.

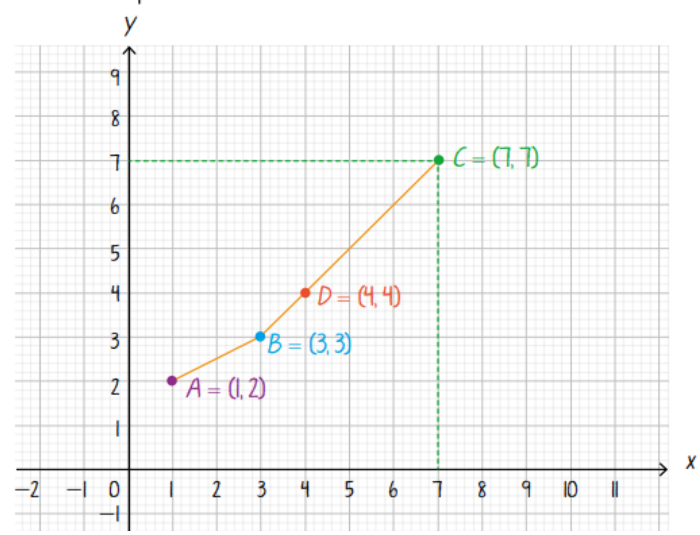
A continuación, se grafica la tabla.



Una vez que se grafica la función utilizando los valores que se conocen, el problema de encontrar cuánto vale y cuando x = 4 se reduce a buscar ese punto en la gráfica para y

Se ubica el punto x = 4 en el eje horizontal y se sube hasta tocar la recta de la gráfica, para de ahí desplazarse al eje vertical en línea recta, hasta donde se toca dicho eje de las y

x	y
1	2
3	3
4	?
7	7



De esta forma se puede encontrar que, cuando x = 4 , el valor de y = 4.

Actividad. Revisa las tablas de datos, grafícalas y encuentra el valor que falta.

x	y
2	3
4	
5	9

x	y
0	4
3	
4	0

Tema 2. Problemas de interpolación Lee el problema siguiente.

Observa la tabla y la gráfica para que conozcas la forma de interpretar problemas y puedas graficarlos.

Ejemplo:

Un albañil tarda 6 días en construir una barda, mientras que 5 albañiles tardan solo 2 días. ¿Cuántos días tardarán 2 albañiles en construir la misma barda?

Para resolver el problema, se empieza por ordenar en una tabla la información que se tiene. Se llamará **x** al número de albañiles y **y** a la cantidad de días que tardan en construir la barda.

Después se grafica la tabla y se ubica el valor de la y cuando x = 2

De esta forma, se puede ver que 2 albañiles tardarán 5 días en construir la barda.

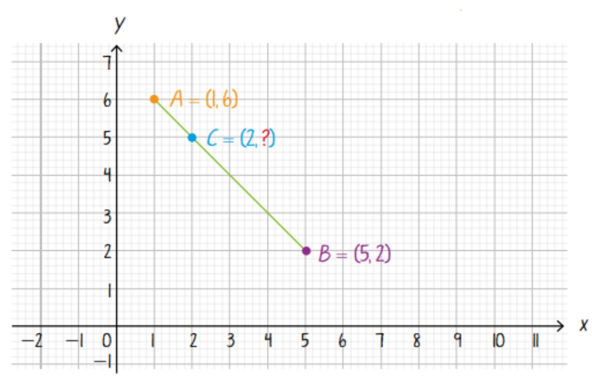
Puntos asociados

x	y
1	6
2	?
5	2

(1, 6)

(2, ?)

(5, 2)



Actividad. Lee los problemas, llena la tabla de datos, crea tu propio plano cartesiano y obtén la solución de cada caso graficando

a) Marcos fue a una papelería y compró 2 borradores para su hija por $ 12. Una semana después, regresó y compró otros 7 borradores por $ 42. ¿Cuánto debería pagar si comprara 6 borradores?

b) Jeremías lleva jugando ajedrez muchos años y se ha dado cuenta de que aumenta su puntuación en la misma cantidad cada año. Si a los 4 años y medio de jugar tenía una puntuación de 1 800 y a los 5 años y medio una puntuación de 1 950. ¿Cuál era su puntuación a los 5 años?

c) En los últimos años la contaminación en una ciudad ha ido disminuyendo la misma cantidad por mes; si en el mes 2 de este año se producían 58 toneladas diarias de basura al día y en el mes 10 se producían 52 toneladas, ¿cuántas toneladas se producían en el mes 6 de este año?

Secuencia 8. Extrapolación de puntos en el plano cartesiano

Tema 1. La extrapolación

Existe un procedimiento semejante para cuando el valor que se busca está fuera de este rango, que se conoce como extrapolación.

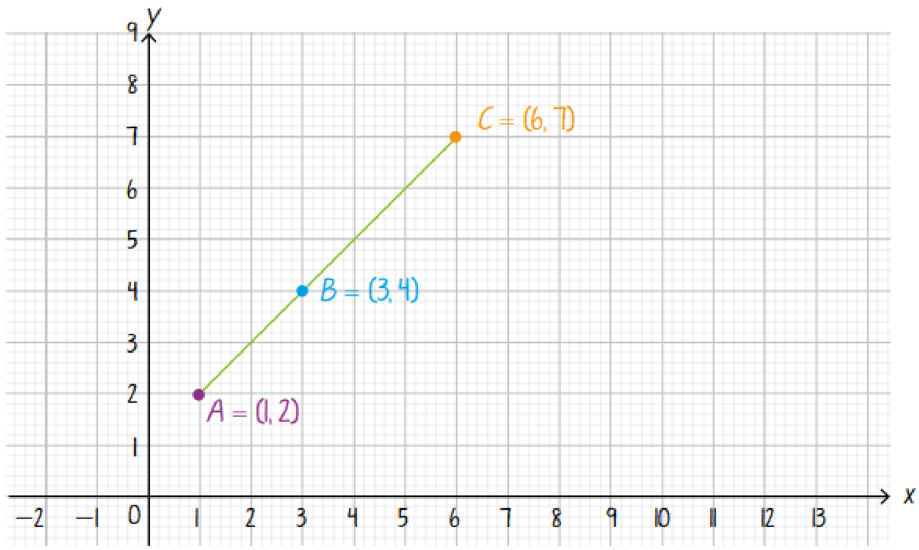
Para encontrar el valor de y cuando x = 8, primero se debe agregar el valor que se está buscando a la tabla y ordenar los datos de acuerdo con el valor de x

En este caso, el rango de valores conocidos va desde x = 1 hasta x = 6, por lo que x = 8 no está dentro de este rango. Es por ello que el dato que se busca se ubica en uno de los extremos de la tabla y el método a utilizar para encontrarlo es la extrapolación.

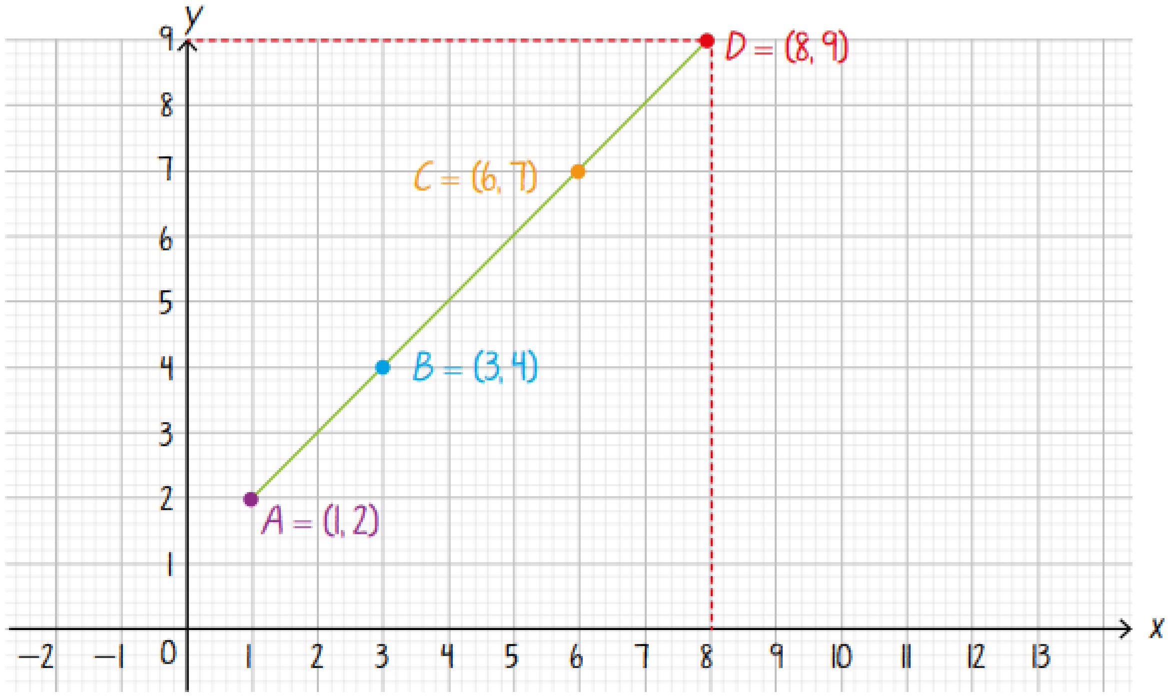
Puntos asociados

Puntos asociados	x	y	$y(x) = x$
(1, 2)	1	2	$y(1) = 2$
(3, 4)	3	4	$y(3) = 4$
(6, 7)	6	7	$y(6) = 7$
(8, ?)	8	?	$y(8) = ?$

Después se grafican los datos de la tabla.



Para encontrar el valor de y, se extiende la línea de la función hasta hallar el punto en el que toca a la línea vertical. Una vez que se dibuje el punto, se hace una línea horizontal hasta tocar el eje y. El valor de y que esta última línea toque, es el valor que se está buscando.



De esta manera se puede determinar que:

$y = 9$ cuando $x = 8$, es decir $y(8) = 9$.

Tema 2. Utilidad de la extrapolación en la resolución de problemas

Tanto la interpolación como la extrapolación se pueden utilizar para calcular datos desconocidos a partir de otros, incluyendo los estadísticos. En el caso de la extrapolación, puede ser para tratar de predecir cómo se comportarán ciertos datos a futuro.

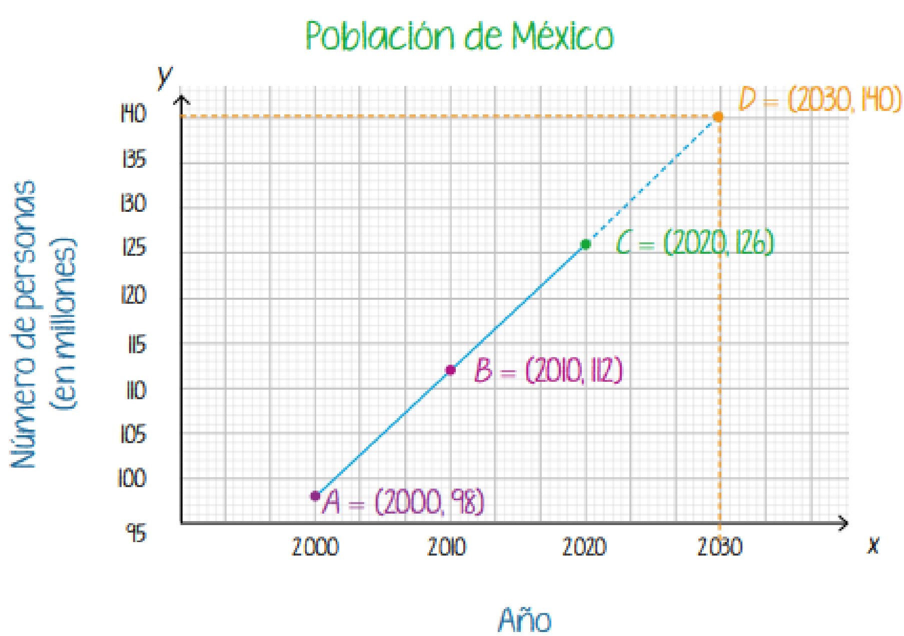
La tabla contiene cifras redondeadas de los censos de población de los años 2000, 2010 y 2020 que fueron recolectadas por el INEGI.

Si se supone que en los años siguientes se seguirá la tendencia de los datos en la tabla, se puede utilizar la extrapolación para predecir cuál será la población de México en 2030.

Primero se debe ubicar el valor que se busca en la tabla.

Población de México		
Puntos asociados (x, y)	Año	Población total en millones (cifra redondeada)
(2000, 98)	2000	98
(2010, 112)	2010	112
(2020, 126)	2020	126
(2030, ?)	2030	?

En este caso, el año se representa con la variable x, y la población total en millones se representa con la variable y. Después, se grafica la función para encontrar el valor de y cuando x = 2030.



Se puede concluir que la población de México será de aproximadamente 140 millones de personas en 2030. Como es un cálculo basado en datos anteriores no es exacto, por eso se emplea la palabra "aproximadamente".

El valor más certero se obtendrá cuando se realice el censo en 2030. Pero con este cálculo se tiene idea del incremento de la población, lo que resulta útil para la planeación y toma de decisiones actuales.

Actividad. Lee los problemas y resuélvelos con el uso de la extrapolación, llena la tabla y haz la gráfica en cada ejercicio.

a) Rodimiro hace pasteles integrales y bajos en azúcar, entregó 2 pasteles y recibió $700.00. Para el día siguiente le encargaron 4 del mismo tipo y le pagaron $1 400. ¿Cuánto recibirá si le encargan 7 pasteles?

b) Leticia recorre 9 kilómetros por hora en bicicleta con una velocidad constante. Si con esa misma velocidad tarda 2.5 horas en recorrer 22.5 km, ¿cuánto avanzará en 3 horas?

c) La fábrica de paletas comenzó a producir paletas sabor piña, de las cuales fabricarán 50 más cada semana. Si en la primera semana hicieron 50 y en la segunda 100, ¿cuántas piezas estarán fabricando en la semana 5?

UNIDAD 3 Probabilidad clásica

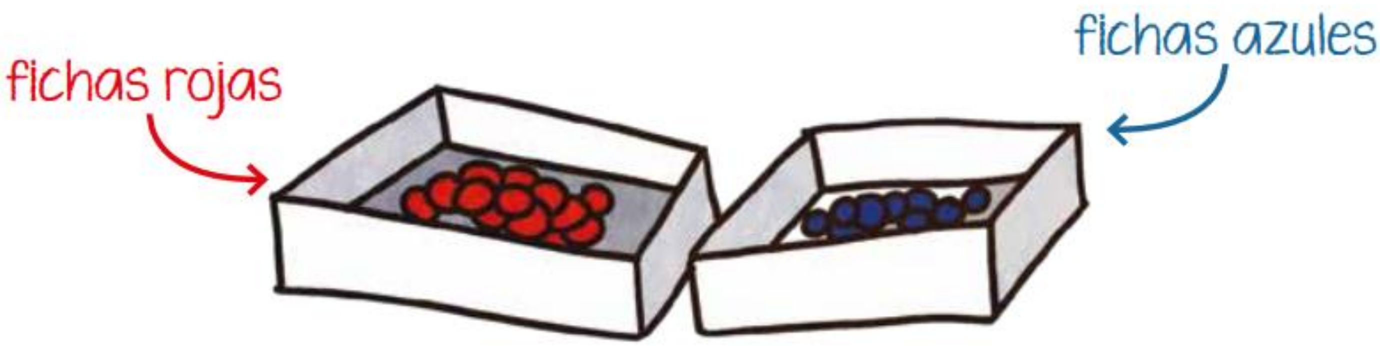
Secuencia 9. Situaciones en las que interviene el azar

Tema 1. Concepto de probabilidad

El estudio de la probabilidad, como parte de las matemáticas, se centra en conocer en qué medida es posible que suceda un resultado. Se desarrolló igual que muchas ciencias, por la necesidad de explicar y registrar diferentes sucesos de la vida diaria.

El origen de la probabilidad se encuentra también en situaciones de la vida diaria, como tener que mantener un inventario de la comida a partir por ejemplo del número de mazorcas que se tenían guardadas; o matemáticas más complejas como calcular el área de siembra de acuerdo con la forma del terreno.

En probabilidad se busca conocer en qué medida es posible que suceda un resultado. Por ejemplo, si se tiene una caja con la misma cantidad de fichas rojas y azules, se puede deducir que al sacar una ficha se tiene la mitad de las posibilidades de que sea roja y la otra mitad de posibilidades de que sea azul.



Por lo tanto, cuantificar una situación en probabilidad significa calcular su probabilidad; en este caso, se dice que se tiene el 50% de probabilidad de sacar una ficha azul y el 50% de sacar una ficha roja.

Tema 2. Concepto de azar

Dentro de la probabilidad se tienen que considerar varios detalles para calcular una situación de forma exacta.

El azar, en estadística y probabilidad, es la característica de un experimento que produce resultados diversos, impredecibles en cada situación concreta, pero cuyas frecuencias, a la larga, tienden a estabilizarse.

En matemáticas, el azar, o fenómeno aleatorio, se refiere a eventos cuyo resultado no se puede predecir con certeza, aunque se conozcan todos los posibles resultados. Se estudia a través de la teoría de la probabilidad, que cuantifica la posibilidad de que ocurra un suceso específico bajo condiciones de incertidumbre.

Tema 3. Situaciones cotidianas en las que puede intervenir el azar

Ya has conocido las definiciones y algunos ejemplos de probabilidad y del azar. A continuación, se plantean algunas situaciones donde se involucra el azar y algunas en las que no.

Ejemplo:

En la tortillería de Mario era posible comprar las tortillas después de las tres de la tarde. Un día, Moisés abrió una cocina económica frente a la tortillería y compró 20 kg de tortillas para un cliente que tendría una fiesta. Por lo tanto, Rosario, que estaba formada después de Moisés, ya no alcanzó a comprar.

La agricultura de temporal depende del comportamiento de las lluvias, así como de la capacidad del suelo para captar agua y conservar la humedad. Estas características hacen que la agricultura de temporal sea incierta y que los efectos del cambio climático dificulten más la predicción de las temporadas de lluvia para saber cuándo sembrar y cuándo cosechar.

Otro caso cotidiano donde no se interpone el azar, es cuando se compra una paleta de fresa que se encuentra sellada en una bolsa no transparente: es seguro que esta paleta será sabor fresa. En cambio, si fueras a una paletería y pidieras su producto más popular, no tendrías seguridad de cuál sabor te darían porque la elección dependería del gusto de otras personas.

Tema 4. Eventos en los que interviene el azar y eventos en los que no

Recuerda que el azar depende de factores no predecibles. Hasta el momento has revisado algunos casos cotidianos donde influye, pero también es necesario distinguir aquellos casos donde no se presenta.

En los eventos que no tienen factores impredecibles no interviene el azar, como la respiración de las personas, ya que es seguro que se necesita respirar para vivir.

Los eventos en los que no influye el azar son aquellos donde los factores externos no pueden cambiar el resultado. Otro ejemplo de estos eventos es la combinación de colores: se conoce que los colores primarios son el azul, el rojo y el amarillo, y se conoce también el resultado de mezclarlos.

Si quieres usar un tono anaranjado, deberás mezclar el color rojo con el amarillo e igual sucede con el morado y el verde:

Rojo + Amarillo = Anaranjado

Rojo + Azul = Morado

Amarillo + Azul = Verde

Secuencia 10. Experimentos aleatorios con dos resultados posibles

Tema 1. El experimento aleatorio

Un experimento es la observación de un fenómeno que sucede en la naturaleza. Puede ser de dos tipos: experimento determinista y experimento aleatorio.

El experimento determinista es aquel en el que no hay dudas acerca del resultado que se conseguirá si se repite varias veces.

El experimento aleatorio es aquel en el que no se puede anticipar el resultado de lo que va a ocurrir porque interviene el azar, aunque sí se conocen todos los resultados posibles que se pueden obtener al realizarlo. Por ejemplo, lanzar una moneda y observar de qué lado cayó, solo tiene dos resultados posibles.

La característica de un experimento aleatorio es que se ejecuta varias veces de forma controlada para registrar los resultados; es decir, que se repiten las condiciones posibles en las que sucedió cuando se ejecutó por primera vez.

Tema 2. Dos resultados posibles

En un experimento aleatorio debe haber más de un solo resultado posible, aunque se inicie y se ejecute de la misma manera, de lo contrario sería completamente predecible y no intervendría el azar

Ejemplos:

Tener una bolsa llena de fichas azules y extraer una para conocer su color no es un experimento aleatorio porque solo tiene un resultado: es completamente predecible que la ficha extraída será de color azul.

Si se quieren registrar los resultados de lanzar una moneda y ver de qué lado cae, primero se debe identificar como evento cada lado de la moneda: un evento es cara y el otro evento es águila.

Tema 3. Espacio muestral y registro de experimentos aleatorios con dos resultados posibles

Como en el experimento aleatorio se repite el evento varias veces, es necesario y eficiente llevar un registro adecuado. Para ello, se utilizan conjuntos que son, como dice su nombre, grupos de datos que pertenecen a algo.

Un conjunto característico en probabilidad es aquel llamado espacio muestral, que es el conjunto de todos los eventos posibles o resultados que se obtienen al realizar un experimento.

En el experimento aleatorio de lanzar una moneda, los eventos del espacio muestral se compondrán de los resultados: cara y águila.

Espacio muestral = { cara, águila }

En ciertos casos es posible simplificar la escritura; en este caso, simplificamos con C el evento cara y con A el evento águila.

Si los valores obtenidos son águila, cara, cara y águila, el conjunto de resultados será:

Resultados = { A, C, C, A }

Secuencia 11. Experimentos aleatorios con hasta seis resultados posibles

Tema 1. Representación de la probabilidad de un evento con fracciones

Para empezar, es necesario aclarar la diferencia entre la probabilidad y el porcentaje. Como ya sabes, el porcentaje es un número que va desde el 0% hasta el 100%; aplicado a la probabilidad, el cero es la nula posibilidad de que un resultado suceda y el cien representa la completa certeza de que este resultado ocurra.

La probabilidad de que un evento suceda está entre cero y uno, con el cero como nulo y el 1 como resultado seguro. Esto indica que la probabilidad de un evento es un número decimal a excepción de los dos ya mencionados (0 y 1). En el ejemplo de las monedas, cada una tiene 0.5 probabilidades de ocurrir.

En el caso conocido de lanzar la moneda y calcular la probabilidad de cara, el número total de eventos es aquel que ya se dio a conocer como el espacio muestral:

Espacio muestral = { cara, águila }

Es claro que el total de eventos es 2, mientras que el resultado favorable cara es de 1. La probabilidad numérica entonces será:

$$P = \frac{\text{Eventos favorables}}{\text{Total de eventos}}$$

$$P = \frac{1}{2}$$

Si sumas las probabilidades de los eventos que forman el espacio muestral, el resultado debe ser 1:

$\frac{1}{2}$ de cara más $\frac{1}{2}$ de águila da como resultado 1

o

$$0.5 + 0.5 = 1$$

Del mismo modo, al sumar los porcentajes de cada evento, el resultado debe ser igual a 100%.

$$50\% + 50\% = 100\%$$

Actividad. Repasa lo aprendido acerca de la cuantificación de los resultados de un experimento aleatorio relacionando con una línea ambas columnas.

▪ Fórmula de la probabilidad de un evento.	Desde 0 hasta 1.
▪ Intervalo en números de la probabilidad.	$P = \frac{1}{2}$
▪ Intervalo en porcentaje de la probabilidad.	$P = \frac{\text{Eventos favorables}}{\text{Total de eventos}}$
▪ Probabilidad de obtener sol al lanzar una moneda.	Desde 0 hasta 100.
▪ Conjunto del espacio muestral de lanzar una moneda.	{C, A}
▪ Conjunto de resultados de lanzar una moneda tres veces.	{A, A, C}

Tema 2. Representación con una fracción de la probabilidad de un evento

Durante la inscripción a diferentes programas, como talleres o cursos, el número de personas que asisten suele ser grande como para atenderlas a todas en un solo día. Una forma de organizar a quienes se inscribieron es por medio del abecedario.

Ejemplo:

El primer día –lunes– aceptan a personas con la letra inicial de apellido A, B, C, D, E y F.

El evento en este caso sería plantear con qué letra comienza el apellido de la persona que llega a inscribirse.

El espacio muestral de personas que se inscribirán el lunes sería el siguiente:

$$\text{Espacio muestral} = \{A, B, C, D, E, F\}$$

Con un total de resultados posibles de 6, porque son seis letras. Si se desea calcular la probabilidad de que se inscriban personas cuyo primer apellido comience con D, se puede escribir de esta forma:

$$P(\text{Apellido que comience con D}) = \frac{1}{6}$$

Nota que al escribir de esta forma la probabilidad, se coloca entre paréntesis lo que se busca. Si haces la operación, a mano o con calculadora, el resultado de una persona con el apellido que comience con D es de aproximadamente 0.16 en decimales redondeados, porque 1 : 6 5 0.1666667, o de 16.6 o 17% en porcentaje redondeado.

Recuerda que, por tratarse de un evento equiprobable, cualquiera de los 6 posibles resultados tiene la misma probabilidad.

En ocasiones se requiere conocer la probabilidad de obtener no uno, sino dos resultados. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado puede buscarse la probabilidad de obtener los números 3 y 5.

Para hacer este cálculo, se obtiene la probabilidad de cada resultado y después se suman. Se comienza por describir el espacio muestral:

$$\text{Espacio muestral} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Luego se calcula la probabilidad de sacar el número 3:

$$P(\text{Obtener } 3) = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{Obtener } 3) = 1-6 = 0.16$$

La posibilidad de sacar 3, o cualquiera de los demás resultados es de aproximadamente 0.16 en decimal y 16.7% en porcentaje, ya que se trata de un evento equiprobable. Así:

$$P(\text{Obtener } 3) = 0.16$$
$$P(\text{Obtener } 5) = 0.16$$
$$P(\text{Obtener } 3) + P(\text{Obtener } 5) = 0.32$$

Actividad. Calcula las probabilidades en fracción y porcentaje que se piden.

En el experimento aleatorio de lanzar un dado, la probabilidad de obtener el número 4.

Operaciones:

Resultado en fracción:

En el mismo experimento aleatorio, la probabilidad de obtener el número 6.

Operaciones:

Resultado en fracción:

Tema 3. El experimento aleatorio con seis posibles resultados: tirar un dado

El experimento aleatorio que vas a revisar es el de lanzar un dado, que tiene seis posibles opciones.

Al tirar el dado todas las posibles opciones a obtener son las siguientes:

$$\text{Espacio muestral} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Anteriormente se ha simplificado la forma de escribir los posibles resultados, como Blanco a (B) o Negro a (N). En este caso, los números contienen un solo dígito, por lo que se usarán de esa manera.

Ya viste que cada número tiene la probabilidad de caer 0.16 veces; porque en este caso, el experimento aleatorio consiste en lanzar un dado seis veces.

Después de tirar el dado, los resultados conseguidos son 5, 6, 2, 1, 5 y 2, que se representan de esta forma.

$$\text{Resultados} = \{5, 6, 2, 1, 5, 2\}$$

Al analizar los resultados se puede resaltar que el 5 y el 2 salieron dos veces, y que los números 1 y 6 se obtuvieron una sola vez. Los números 3 y 4 no salieron en ninguna ocasión.

En otro experimento con un dado, esta vez se lanza 15 veces. Los valores obtenidos se ven a continuación:

$$\text{Resultados} = \{2, 5, 5, 6, 1, 3, 2, 1, 5, 2, 6, 3, 1, 2, 2\}$$

Se puede cuantificar que el número que cayó más veces es el 2, pues salió cinco veces; siguen el 1 y el 5, que salieron tres veces, el 3 y 6 salieron dos veces y el 4 no salió ninguna vez.

Como puedes ver, no es posible predecir exactamente los resultados. A pesar de que todos los números sean equiprobables, al realizar un evento en la vida real, no siempre los resultados serán iguales.

Tema 4. El experimento aleatorio con seis posibles resultados: sacar una de las seis canicas

Para este tema, se realizará un experimento con más elementos: dentro de una bolsa en la que no es visible el interior, se introducen seis canicas de diferentes colores para sacar una de ellas y registrar el resultado.

Para este experimento aleatorio primero se definen las partes para su registro correcto.

El evento consiste en sacar una canica. Los resultados posibles o espacio muestral son una canica blanca (B), una negra (N), una azul (A), una roja (R), una verde (V) y una amarilla (AM). Para su fácil registro, se escribirán los posibles resultados con la inicial del nombre del color:

Espacio muestral = { B, N, A, R, V, AM }

A partir de este espacio y de realizar el experimento se registra en el conjunto de resultados.

Debe indicarse también que, al igual que el experimento con dos canicas, durante todos los eventos es necesario que al sacar una, esta se devuelva a la bolsa antes de comenzar el siguiente evento, lo cual garantiza que las condiciones iniciales sean las mismas

Por último, se hará el registro del experimento aleatorio.

En el experimento con 20 eventos se tienen los siguientes resultados:

Resultados = { V, AM, A, V, N, A, B, R, B, A, N, AM, R, A, V, B, AM, R, N, A }

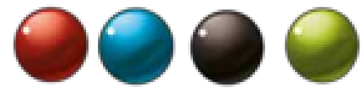
Se concluye que la canica azul se sacó 5 veces, mientras que todas las demás se sacaron 3 veces.

Este es uno de los conjuntos de resultados donde es más fácil notar la equiprobabilidad de los seis resultados, aun cuando uno de ellos fue más notorio.

Actividad. Relaciona los resultados con la imagen correspondiente.

- Resultado = { B, N, B, M, R, A, B }

- Resultado = { R, A, V, V, N }



- Resultado = { R, A, R, V }

- Resultado = { R, A, N, V }

Secuencia 12. Experimentos aleatorios con doce resultados posibles

Tema 1. Posibles resultados de un experimento aleatorio

Al momento de realizar un experimento aleatorio es necesario que su espacio muestral esté bien definido, como cuando participas en una rifa o sorteo, pues existe un número total de boletos; también cuando juegas buscaminas, lotería o algún otro juego.

Hay casos de experimentos con resultados posibles y bien definidos. Un ejemplo sería Un mamífero, como el gato, puede ser hembra o macho.

En un evento se puede seleccionar un animal al azar y verificar cuál de las dos condiciones cumple:

Espacio muestral = {hembra, macho}

En el caso de la rifa de un refrigerador entre las 20 personas que laboran en una pequeña empresa, cada una deposita su boleto en una urna. El espacio muestral es el siguiente, considerando la numeración de los boletos:

Espacio muestral = {01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

En este caso es posible enlistar y definir un experimento aleatorio, ya que las posibilidades están claramente definidas, pues cada persona trabajadora tiene las mismas posibilidades de ganar la rifa.

Actividad. Relaciona con una línea ambas columnas, según corresponda.

▪ Espacio muestral de los puntos cardinales.	Espacio muestral = { N, S, E, O }
▪ Espacio muestral de colores primarios.	Espacio muestral = { Azul, Amarillo, Rojo }
▪ Espacio muestral de números del 1 al 4.	Espacio muestral = { Pulgar, Índice, Medio, Anular, Meñique }
▪ Espacio muestral de los dedos de la mano.	Espacio muestral = { 1, 2, 3, 4 }

Tema 2. Identificación de eventos aleatorios con más resultados posibles

Las posibilidades de un evento pueden ser infinitas. A continuación, se muestran ejemplos de eventos aleatorios con 12 resultados posibles.

Dentro de una baraja inglesa se tienen 4 juegos de cartas que son de corazón, espadas, diamantes y tréboles, y en cada juego de figuras se tienen 13 cartas, contando desde el as (A), del 2 al 10, hasta la jota (J), la reina (Q) y el rey (R).

Con estas cartas se puede definir un evento al quitar los ases (A) para dejar solo 12 cartas, como se muestra en la imagen.

El evento consiste en revolver las cartas y tomar una al azar, lo que da 12 posibles resultados, así que el espacio muestral sería el siguiente:

$$\text{Espacio muestral} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, R\}$$